Le 8 mai 2020

Bonjour à tous,

J’espère que vous et votre famille vous portez bien.

J’ai reçu quelques mails d’élèves me demandant de vous faire parvenir la suite du cours. Après réflexion j’ai décidé de le faire car vous disposez des acquis nécessaires (dérivées, signe d’une fonction, asymptotes) pour pouvoir comprendre les paragraphes 5 et 6.

Ceux- ci ne pourront pas faire l’objet d’un contrôle bien sûr tant que la matière n’aura pas été expliquée en classe mais vous êtes en 5° et vous devez prendre conscience que ce travail est pour VOUS, votre avenir, même si celui-ci vous parait à ce jour incertain. Soyez sûrs que l’être humain est capable de grandes choses lorsqu’il se trouve au pied du mur et pour l’instant tous les scientifiques du monde cherchent une solution à cette crise et ils trouveront, je leur fais confiance. Soyez dignes de leur travail et imaginez que vous pourrez vous aussi par votre travail, un jour, faire avancer les choses, dans le domaine scientifique pour ceux qui l’ont choisi et dans un autre domaine pour les autres.

Vous aurez remarqué j’espère l’utilité des mathématiques dans cette crise sanitaire. Toutes les décisions prises l’ont été sur base de prévisions mathématiques et dans les paragraphes que je vous ai envoyés vous prendrez conscience de la notion de décroissance et point d’inflexion d’une courbe, notions dont les media ont beaucoup parlé depuis deux mois. Nous étudierons l’année prochaine les fonctions exponentielles et je ne pourrai plus jamais commencer mon cours à partir de ce jour, sans faire référence à cette crise de 2020 qui illustre si bien ces fonctions. Nous aurons alors tous les éléments pour comprendre en profondeur ce qui nous est arrivé.

Vous pouvez me poser des questions via mon adresse mail martinebottin@hotmail.com
Vous ne me dérangez pas, je vous réponds quand je peux.

Bon travail et prenez soin de vous.

M.Bottin

5. Rôle de la dérivée première

5.1. Activités :

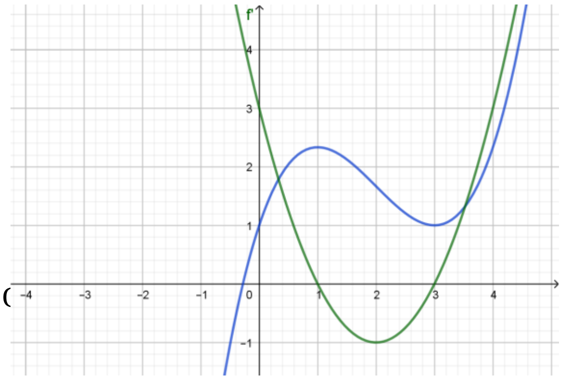
a) Observe la représentation dans un même repère des graphiques, tracés par logiciel, de la fonction

$\mathbf{f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1}$ et de sa dérivée $\mathbf{f'(x) = x^2 - 4x + 3}$.

Compléter le tableau

x		1		3	
Variations de **f**					
Signe de **f'**					

(



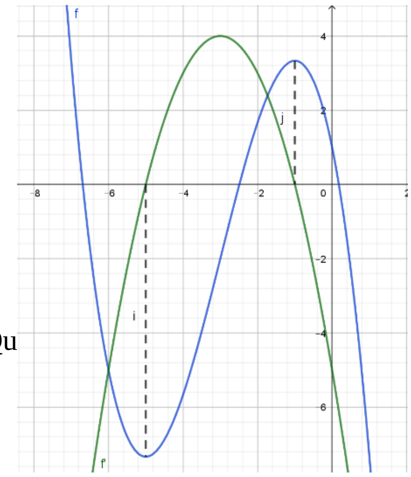
b) Observe la représentation dans un même repère des graphiques, tracés par logiciel, de la fonction

$\mathbf{f(x) = -\frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x + 1}$ et de sa dérivée $\mathbf{f'(x) = - x^2 - 6x - 5}$.

Compléter le tableau

x		**-5**		**-1**	
Variations de f					
Signe de f'					

Qu



c) Quelle correspondance peut-on établir entre les variations de la fonction **f** et le signe de sa dérivée **f'** ?

Comment repérer un maximum ou un minimum de la fonction **f** ?

5.2. Propriétés

f est **CROISSANTE** sur] a , b [

$\Leftrightarrow$

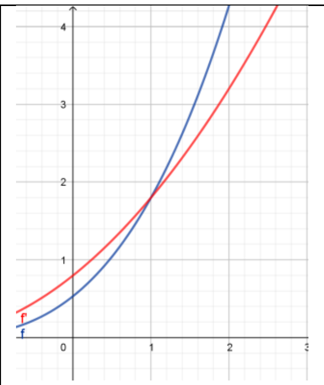
Les pentes des tangentes sont positives sur] a , b [

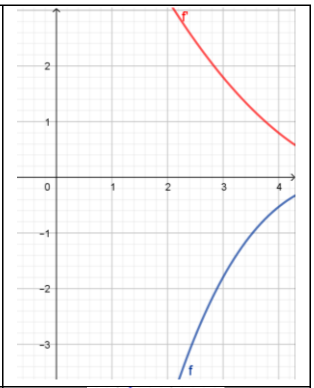
$\Leftrightarrow$

f' est positive sur] a , b [

$\Leftrightarrow$

$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in \,]a, b[$





f est **DECROISSANTE** sur] b , c [

$\Leftrightarrow$

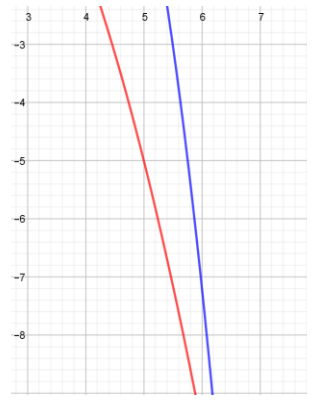
Les pentes des tangentes sont négatives sur] b , c [

$\Leftrightarrow$

f' est négative sur] b , c [

$\Leftrightarrow$

$f'(x) \leq 0 \qquad \forall x \in \,]b, c[$



f admet un **MINIMUM** en c

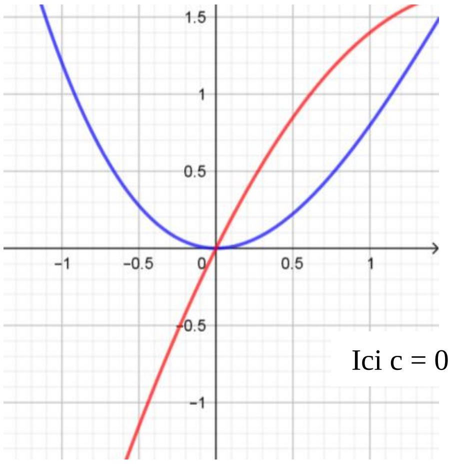
$\Leftrightarrow$

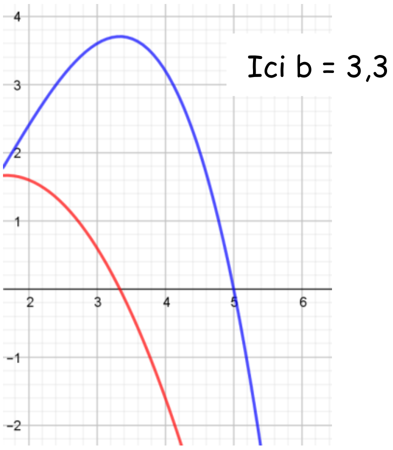
f' s'annule en c en **changeant de signe de - à +**

$\Leftrightarrow$

Le point (c, f(c)) est un minimum, point **bas**

x		c	
Signe de f'	-	0	+
Variations de f	↘	f(c)	↗





f admet un **MAXIMUM** en b

$\Leftrightarrow$

f' s'annule en b en **changeant de signe de + à –**

$\Leftrightarrow$

Le point (c, f(c)) est un maximum, point **haut**

x		c	
Signe de f'	+	0	-
Variations de f	↗	f(c)	↘

5.3. Exercices

1. A l'aide du tableau de signe de la dérivée d'une fonction, **déduire** les variations de la fonction, les intervalles de croissance, de décroissance ainsi que les extrémums.

x		1		3	
Signe de **f'**	+	0	+	0	-
Variations de **f**					

x		0		5	
Signe de **f'**	+	0	-	0	+
Variations de **f**					

x			-2		1		5		
Signe de **f'**		-	/	-	0	+	/	+	
Variations de **f**	AH y = 1		AV x = -2				AV x = 5		AH y = 2

2. **Associer** chaque graphique de fonction (A à D) au tableau de signe de sa dérivée après avoir complété le tableau des variations de la fonction.

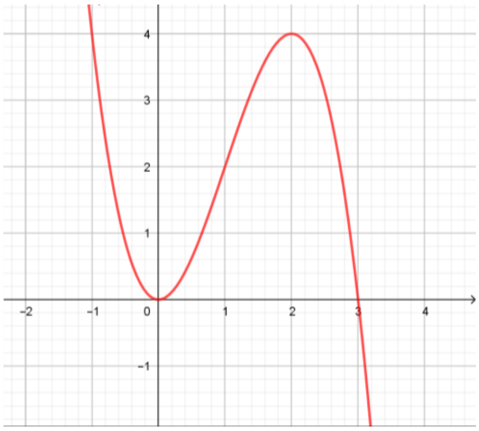
x		0		3	
Signe de $\mathbf{f_1}$'	+	0	+	0	-
Variations de $\mathbf{f_1}$					

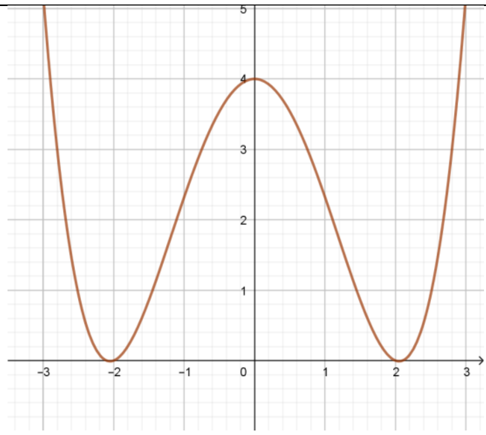
x		0		2	
Signe de $\mathbf{f_2}$'	-	0	+	0	-
Variations de $\mathbf{f_2}$					

x		-2		0		2	
Signe de $\mathbf{f_3}$'	-	0	+	0	-	0	+
Variations de $\mathbf{f_3}$							

x		-2		1	
Signe de $\mathbf{f_4}$'	+	0	-	0	+
Variations de $\mathbf{f_4}$					

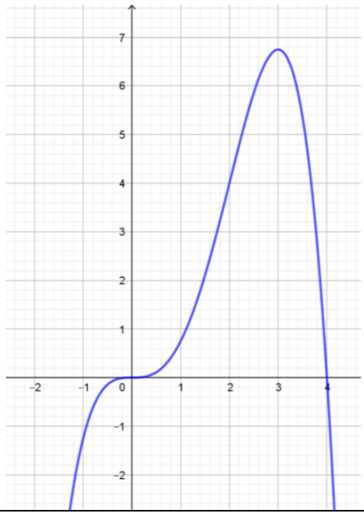
A.

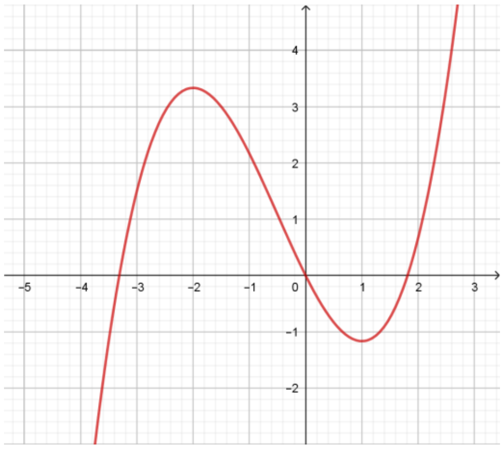




B.

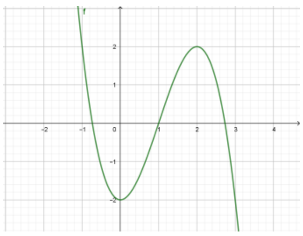
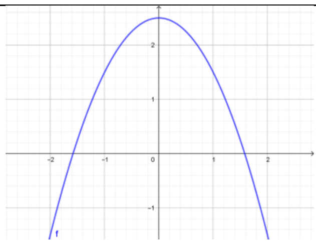
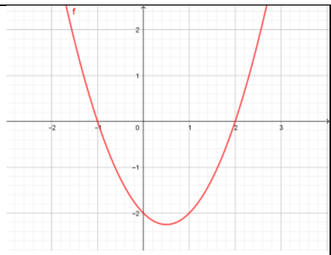
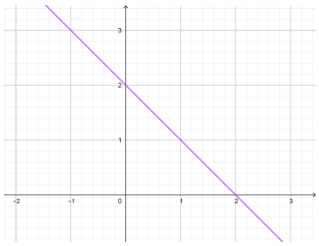
C.





D.

3. **Associer** chaque graphique de fonction à sa fonction dérivée.
Quels sont les points remarquables ?

			
$g_1(x) = -1$	$g_2(x) = 6x - 3x^2$	$g_3(x) = 2x - 1$	$g_4(x) = -2x$

4. **Déterminer** les extrémums et le sens de variation des fonctions données par leur expression.
Vérifier les résultats en traçant le graphique à l'aide d'un logiciel

$h_1(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$	$h_2(x) = (x+1)\,(x-1)^3$	$h_3(x) = \dfrac{x^2 - 5\,x + 10}{x - 2}$	$h_3(x) = \dfrac{10\,x}{x^2 + 1}$

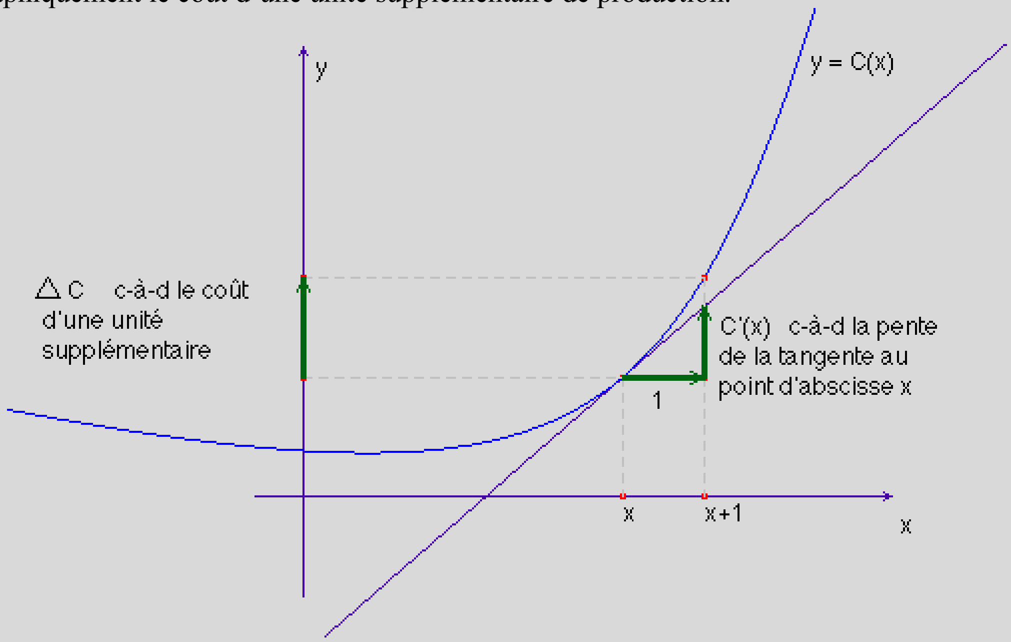
5. La position de deux particules se déplaçant en ligne droite est donnée par les équations horaires $e_1(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 4$ et $e_2(t) = -t^2 + 3t + 4$ (t exprimé en secondes et e en mètres)
A quel moment ces deux particules ont - elles la même vitesse ?

6. Le mouvement rectiligne d'un mobile est donné par $e(t) = t^2 - 3t + 4$

a) Calculez sa vitesse instantanée au temps : $t = 0$, $t = 3$.
b) Quelle est la vitesse instantanée lorsque le mobile a parcouru 8 m ?
c) Calculez l'accélération instantanée.

En économie, la dérivée de diverses fonctions joue un rôle important et apparaît souvent dans la littérature par l'adjonction du qualificatif « marginal » accolé au nom de la fonction.

Soit C le coût total de production en fonction de la quantité x produite.
Représentons graphiquement le coût d'une unité supplémentaire de production.



On constate que $\Delta C \approx C'(x)$
De là, la définition suivante :

Le coût marginal de production est égal à la dérivée du coût total et vaut approximativement le coût d'une unité supplémentaire de production.

7. Le coût total de production mensuel de x tonnes par une firme produisant un métal est donné par

$$C(x) = 500 .(0{,}1\, x^3 - 3x^2 + 50x) + 150\,000$$

Déterminer le coût de la dixième tonne produite en calculant : ΔC puis le coût marginal.
Comparer les résultats.

8. Le bénéfice hebdomadaire d'une usine suisse de conserves est fonction du nombre de tonnes produites. Ainsi

$$B = 5\left(275 - x - \frac{22500}{x+50}\right)$$

B étant exprimé en milliers de francs.
Pour quelle production le bénéfice est-il maximum ?

9. Une fonderie produit x tonnes de fontes par semaine à un coût total de

$$C(x) = 10x^3 - 900x^2 - 45000x + 3000000 \text{ u.m.}$$

Si le prix de vente est fixé à 3000 u.m. la tonne, quelle est la production assurant le bénéfice maximum (si on suppose que toute la production peut être écoulée) ?

10. La consommation stabilisée d'une voiture (nombre de litres aux 100 km et ce à vitesse constante) est donnée par :

$$C = \frac{v^2}{1331} + \frac{250}{v} - 2$$

A quelle vitesse la consommation est-elle minimum ?

11. Le nombre de voitures à l'heure empruntant une nationale est donné par

$$N = \frac{24000}{t^2 - 18t + 91} \qquad 0 < t < 12$$

A quelle heure le trafic est-il le plus dense ?

12. On veut adosser à un mur un poulailler rectangulaire de 8 m². Déterminez les dimensions du poulailler pour que la longueur de treillis nécessaire pour le clôturer soit minimum.

13. L'intérieur d'un réservoir parallélépipédique sans couvercle, dont le fond a la forme d'un carré, doit être recouvert de plomb. La capacité du réservoir est de 32 litres. Quelles doivent être les dimensions de ce réservoir pour que la quantité de plomb nécessaire soit minimum ?

14. Quelles dimensions, à 1 mm près, doit avoir une boîte de conserve cylindrique fermée de 1 litre, pour que sa fabrication exige le moins de tôle possible, c'est à dire que son aire totale soit minimale ? (L'épaisseur de la tôle sera négligée. Comparer alors le diamètre et la hauteur de la boîte. En est-il ainsi avec les boîtes de commerce ?

6. Dérivée et concavité

6.1. Définition

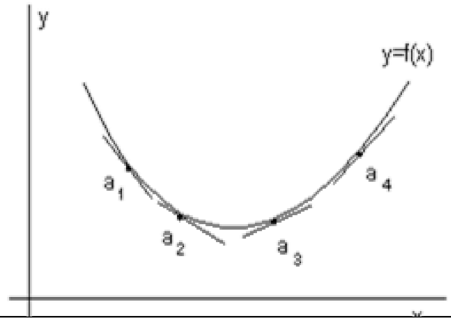
Désignons par a_1, a_2, a_3, a_4 les pentes des différentes tangentes à la courbe ≡ y = f(x).

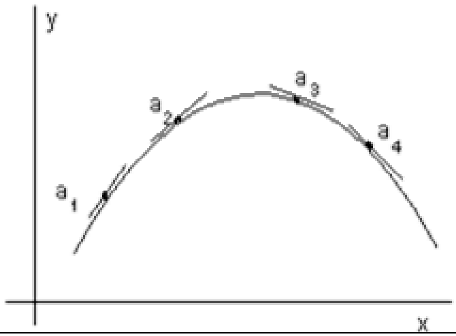
a_1 …..a_2 ….a_3 ….a_4….

Les pentes sont ………………..

Donc f ’ est ………………..

Donc sa dérivée (notée f’’) est ………………..





a_1 …..a_2 ….a_3 ….a_4….

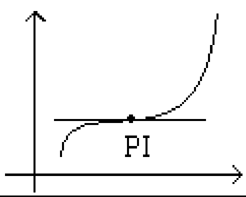
Les pentes sont ………………..

Donc f ’ est ………………..

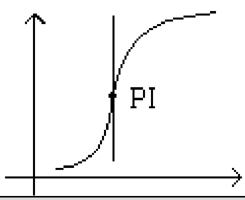
Donc sa dérivée (notée f ″) est ………………..

Le point où se produit un changement de concavité est appelé **point d’inflexion** (PI).
En ce point, la tangente peut être

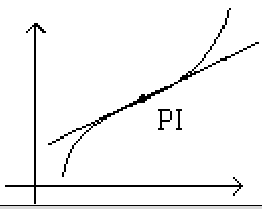
Horizontale



Verticale



Oblique



CONCLUSION

f tourne sa concavité vers le H**AUT** ⇔ f ' est croissante ⇔ f ″ est positive	f tourne sa concavité vers le **BAS** ⇔ f ’ est décroissante ⇔ f ″ est négative

f admet un **POINT D’INFLEXION** en a
⇔
f’’ s’annule en A en **changeant de signe**
⇔
P(a, f(a)) est un point d’inflexion du graphique de la fonction f

x		a	
Signe de **f’’**	-	0	+
concavité de **f**	⌒	f(a)	⌣

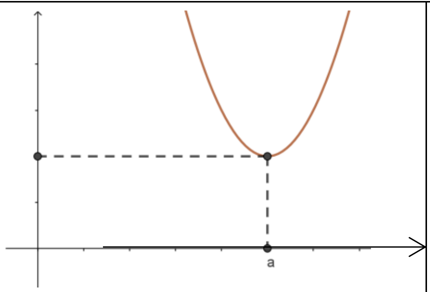
x		a	
Signe de **f’’**	+	0	-
concavité de **f**	⌣	f(a)	⌒

6.2 Exercices

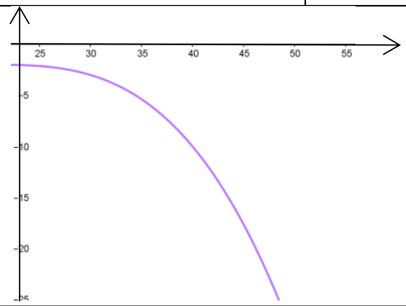
1. Associer **graphique** de fonction, **expression** et **information**

- E_1 : f croit de plus en plus vite
- E_2 : f a un maximum en (a, f(a))
- E_3 : f décroit de moins en moins vite
- E_4 : f admet un minimum en (a, f(a))
- E_5 : f décroit de plus en plus vite
- E_6 : f croit de moins en moins vite

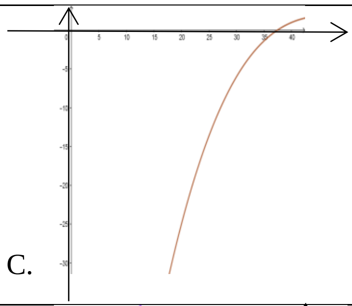
- I_1 : $f' > 0$ et $f'' < 0$
- I_2 : $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$
- I_3 : $f'' > 0$ et $f' < 0$
- I_4 : $f'' > 0$ et $f' > 0$
- I_5 : $f'' < 0$ et $f' < 0$
- I_6 : $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$

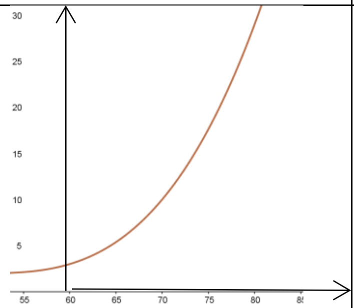


A.

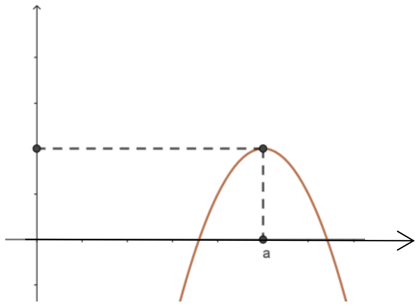


B.

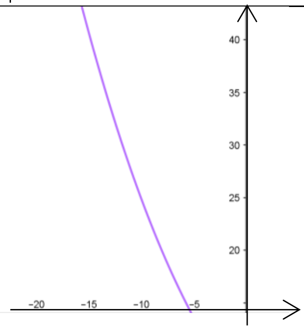

C.



D.



E.



F.

2. Esquisser l'allure du **graphique** de la fonction à partir des informations données par les tableaux

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f_1'		-	-1	-	/	-	
f_1''		-	-	-	/	+	
f	1				$-\infty/+\infty$		1

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1'		+	0	-	/	-	0	+	
f_1''		-	-		/	+	+	+	
f	$-\infty$		-2		$-\infty/+\infty$		0		$+\infty$

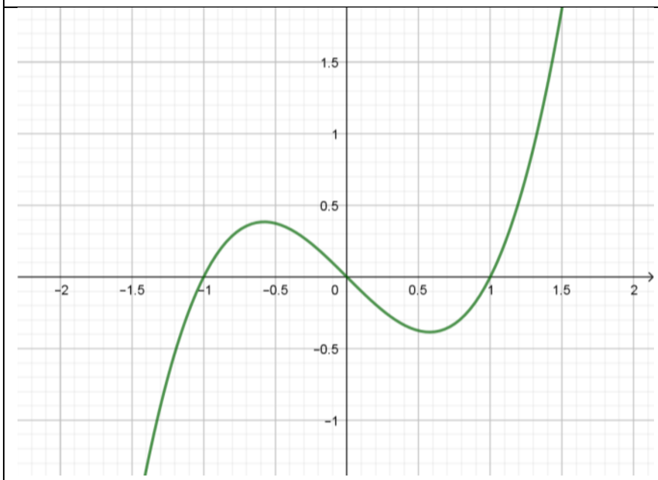
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f_1'		+	+	+	1	+	+	+	
f_1''		-	-	-	0	+	+	+	
f	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$

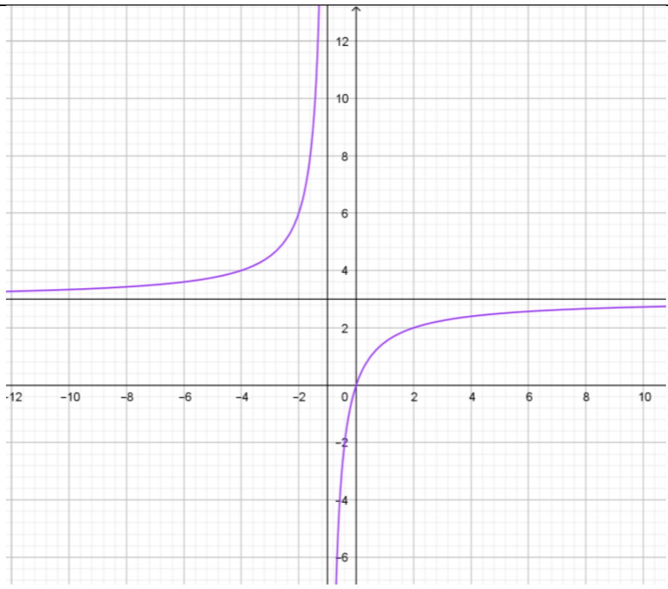
x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f_1'		-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+	
f_1''		+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+	
f	$+\infty$		2		2.5		3		2.5		2		$+\infty$

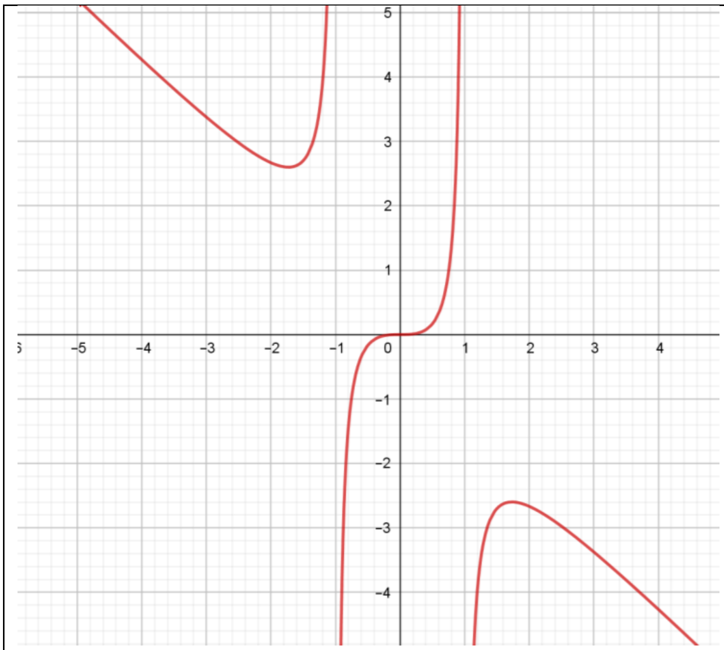
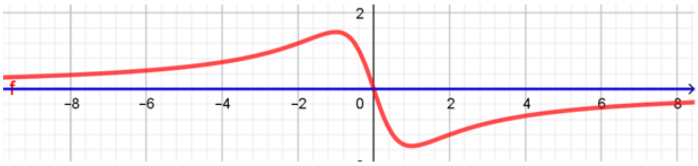
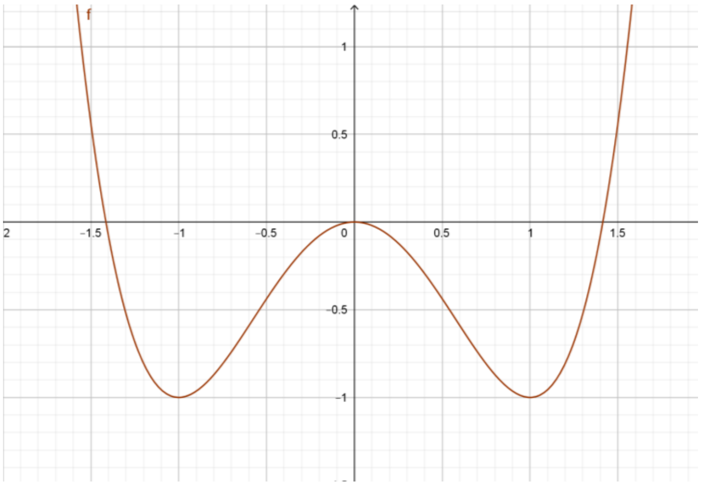
x	-∞		0		1		2		+∞
f_1’		-	/	+	0	-	-	-	
f_1’’		-	/	-	-	-	0	+	
f	-1		-∞/-∞		0		$-\frac{1}{2}$		-1

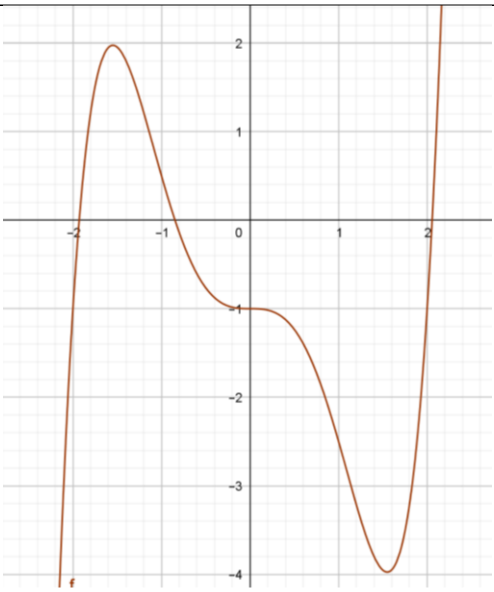
x	**-∞**		**-1**		**0**		**1**		**+∞**
f1’		**-**	/	**-**	**-**	**-**	/	**-**	
f1’’		**-**	/	**+**	**0**	**-**	/	**+**	
f	**0**		-∞/+∞		**0**		-∞/+∞		**0**

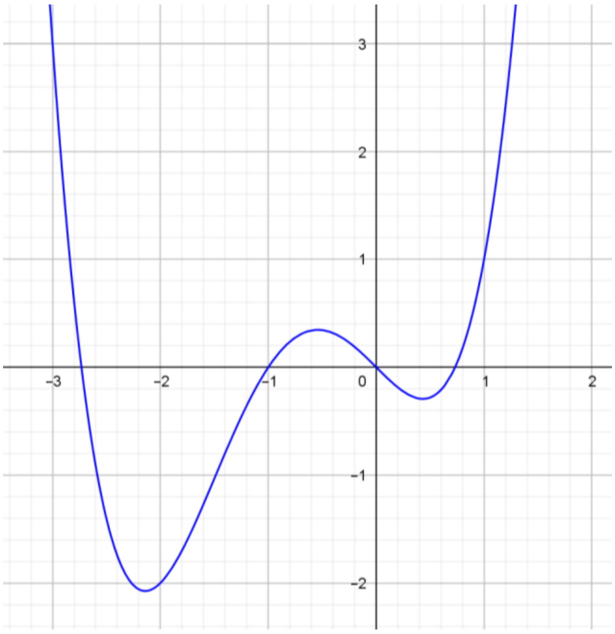
3. Utiliser le **graphique** de la fonction pour établir le tableau de signe de sa dérivée première et de sa dérivée seconde et déterminer ainsi sa variation et sa concavité. Noter les éléments remarquables (extrémum, point d’inflexion, asymptote)









4. Utiliser les **informations** pour esquisser le graphique de la fonction

A. Dom $f_A = \mathbb{R}$; la fonction est toujours positive ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = o$;la dérivée est positive sur]-∞, 2[et négative sur] 2, +∞ [; $f'_A(2) = 0$ et $f_A(2) = 4$.

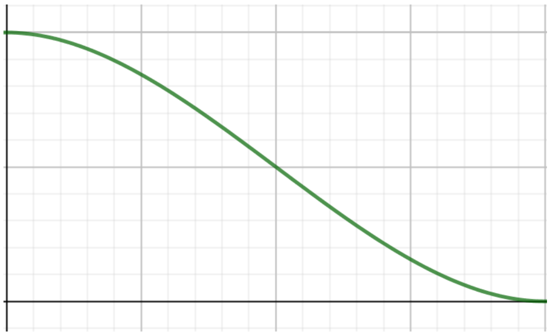
B. Dom $f_B = \mathbb{R}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$; $f'_B(2) = 0 = f'_B(6)$; la dérivée est positive sur]-∞, 2[∪] 6, +∞ [et négative sur] 2, 6 [; $f_B(-2) = f_B(4) = 0$; $f_B(2) = 3$; $f_B(6) = -2$.

C. Dom $f_C = \mathbb{R} \setminus$ **{-1 , 2}** ; $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$; $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = -\infty$; la dérivée est positive sur]-∞, -1[∪] 2, 3 [et négative sur] -1, 2 [∪] 3, +∞ [; $f'_C(3) = 0$; $f_C(3) = 2{,}5$.

APPLICATIONS

1. L'image représente le profil d'un **toboggan** destiné à des jeunes enfants. La hauteur est de 2m et sa longueur de base de 4m. Pour des raisons de sécurité, les pentes au départ et à l'arrivée doivent être horizontales.

   Déterminer l'expression d'une fonction du 3^e degré dont le graphique donne l'allure du toboggan ; cette fonction doit vérifier les consignes de sécurité.



2. **Etudier une fonction**

   Marche à suivre :

   1. Déterminer le domaine de définition de la fonction ;
   2. Caractéristiques
      - la parité de la fonction ;
      - les intersections avec les axes ;
      - le tableau de signes de la fonction ;
   3. Rechercher les asymptotes éventuelles de la fonction (AV-AH-AO) et préciser la position du graphique par rapport à celles-ci ;
   4. Calculer la dérivée première de la fonction, réaliser son tableau de signes et déterminer la variation de la fonction ainsi que les extrema ;
   5. Calculer la dérivée seconde de la fonction, réaliser son tableau de signes et déterminer la concavité de la fonction ainsi que les points d'inflexion ;
   6. Dresser le tableau résumé et donner une allure de la courbe ;
   7. Déduire le tracé du graphique de la fonction, calculer éventuellement des points supplémentaires ;
   8. Vérifier à l'aide du graphique obtenu par logiciel.

1) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$	2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{4-x^2}$	3) $f(x)=\dfrac{-2x}{(x-1)^2}$	4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$
5) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$	6) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-5x+4}$	7) $f(x)=\dfrac{-2x}{(x^2+1)}$	8) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-1)^2}$
9) $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^3}$	10) $f(x)=\dfrac{x^3+2x^2-1}{x^2}$	11) $f(x)=\dfrac{x^2+5x+4}{3-x}$	12) $f(x)=\dfrac{x^3}{4-x^2}$
13) $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{1-x^2}$	14) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$	15) $f(x)=\dfrac{x^3+8}{x^2}$	16) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)^3}$
17) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+10}{x}$	18) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{9-x^2}$	19) $f(x)=\dfrac{-6x}{4-x^2}$	20) $f(x)=\dfrac{x^2+5}{1-x^2}$